1. NUMERISCHE METHODEN ZUR LÖSUNG VON GLEICHUNGEN

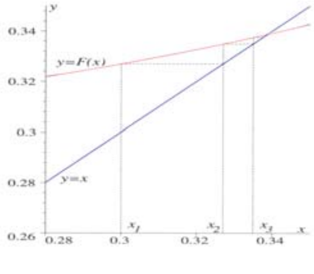
24. Januar 2005

Author: Benjamin Kalytta

Quellen: diverse

Fixpunkt x = F(x)

Fixpunktiteration



$\boxed{|f'(x)| \le L < 1 \;\Rightarrow\; \text{Konvergiert}}$

x_0: Startwert der Iteration
ε : Fehlergrenze
N : max. Iterationsschritte

$\boxed{x_k = F(x_{k-1})}$

Pseudocode:

```
x = x0
for k = 1...N, k ≠ N
    xk = F(xk-1)
    if |xk - xk-1| ≤ ε·(1-L)/L then break
s = xk
```

I.d.R Fixpunkt grafisch ungefähr bestimmen und Iteration durchführen

a-priori Fehlerabschätzung:

$$|x_k - s| \le \frac{L^k}{1-L} \cdot |x_1 - x_0| \qquad \begin{array}{c} s : Fixpunkt \\ x_0 : Startwert \\ x_1 = f(x_0) \end{array}$$

a-postiori Fehlerabschätzung:

$$|x_k - s| \le \frac{L}{1-L} \cdot |x_k - x_{k-1}|$$

Fehlerbetrachtung: (ε : Fehler, L<1)

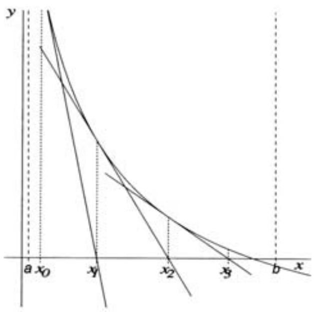
$$|x_k - x_{k-1}| \le \varepsilon \cdot \frac{1-L}{L} \qquad \Rightarrow |x_k - s| < \varepsilon$$

Bestimmung der erforderlichen Iterationsschritte N:

$$N \ge \frac{\ln\left(\varepsilon \cdot (1-L)\right) - \ln|x_1 - x_0|}{\ln L} \qquad \begin{array}{c} x_0 : Startwert \\ x_1 = f(x_0) \end{array}$$

Im Fall $f'(x) > 1$ in I, wende Iterationsverfahren auf f^{-1} an!

Newton Iteration



f(a)*f(b) < 0 => NS vorhanden

Konvergenz: $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$

$$\boxed{x_k = x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})}}$$

η : Fehler (>0)
Gesucht : NS f(s) = 0

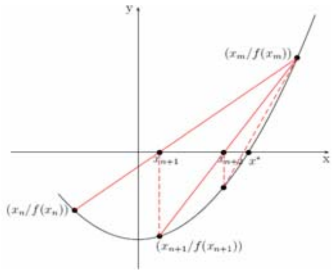
Pseudocode:

```
for k = 1...N, k ≠ N
    xk = xk-1 - f(xk-1)/f'(xk-1)
    if |f(xk)/f'(xk)| < η then break
s = xk
```

Konvergenzkriterium

$f(a) \cdot f(b) < 0$
$f'(x) \ne 0$ für alle $x \in [a,b]$
$f''(x) \ne 0$ für alle $x \in [a,b]$
$f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$

Regula Falsi (Sekanten Verfahren)



Konvergenz: $\boxed{f(x_n) \cdot f(x_{n-1}) < 0}$

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - f(x_n) \cdot \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}}$$

η : Fehler (>0)
Gesucht : NS f(s) = 0

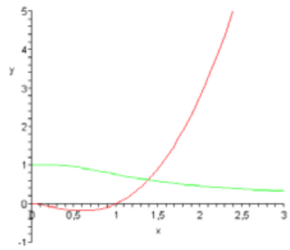
Pseudocode:

```
x0 = xn
x1 = xm
for k = 1...N, k ≠ N
    c = f(x1)·(x1 - x0)/(f(x1) - f(x0))
    if f(x0)·f(x1 - c) < 0 then
        x1 = x1 - c
    else
        x0 = x1 - c
    if (|c| < η) then break
s = x1
```

Beispiele:

Man berechne eine Lsg. von $f(x) = x^2 \cdot \ln(x) - \tanh(\frac{1}{x})$

$x_0 = 1 \quad x_1 = 2 \quad x_{n+1} = x_n - f(x_n) \cdot \dfrac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$



n	2	3	4	5	6
x_n	1.24790	1.33937	1.36912	1.377837	1.38121

Nullstellen von Polynomen (Hornerschema, erweitertes Hornerschema)

Gegeben: p sei eine NS von $P_n(x)$

$P_n(x) = P_{n-1}(x)(x-p)$

Hornerschema:

$$\begin{array}{c|ccccc} & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ & 0 & b_0 \cdot p & b_1 \cdot p & \cdots & b_{n-1} \cdot p \\ \hline p & b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & R = P_n(p) \end{array}$$

$P_{n-1}(x) = b_0 \cdot x^{n-1} + b_1 \cdot x^{n-2} + \cdots + b_{n-2} \cdot x + b_{n-1}$

Erweitertes Hornerschema

$$\begin{array}{c|ccccc} & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ & 0 & \cdots & & & \\ \hline p & b_0 & b_1 & \cdots & b_{n-1} & P_n(p) \\ & 0 & \cdots & & & \\ \hline p & c_0 & c_1 & \cdots & P_{n-1}(p) & = P_n'(p) \\ & 0 & & & & \\ \hline p & d_0 & \cdots & P_{n-2}(p) & = \frac{1}{2!} & \cdot P_n''(p) \\ & \vdots & & & & \\ \hline p & P_0(p) & = & \frac{1}{n!} & \cdot P_n^{(n)}(p) & \end{array}$$

Taylorkoeffizienten

Beispiele:

Gegeben: $\dfrac{2x^3 - 3x^2 + x + 5}{x - 2}$

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & -3 & 1 & 5 \\ & 0 & 4 & 2 & 6 \\ \hline 2 & 2 & 1 & 3 & 11 \end{array}$$

$P_n(x) = 2x^2 + x + 3 + \dfrac{11}{x-2}$

Gegeben: $P(x) = 2x^4 - x^3 - 2x^2 + 3x - 2$

$p = -1$

$$\begin{array}{c|cccccc} & 2 & -1 & -2 & 3 & 2 & \\ & 0 & -2 & 3 & -1 & -2 & \\ \hline -1 & 2 & -3 & 1 & 2 & -4 & = P(-1) \\ & 0 & -2 & 5 & -6 & & \\ \hline -1 & 2 & -5 & 6 & -4 & & = P'(-1) \\ & 0 & -2 & 7 & & & \\ \hline -1 & 2 & -7 & 13 & & & = \frac{1}{2!} P''(-1) \\ & 0 & -2 & & & & \\ \hline -1 & 2 & -9 & & & & = \frac{1}{3!} P'''(-1) \\ & 0 & & & & & \\ \hline -1 & 2 & & & & & = \frac{1}{4!} P^{(4)}(-1) \end{array}$$

$P_{n-1}(x) = 2x^3 - 3x^2 + x + 2$

$P_{n-2}(x) = 2x^2 - 5x + 6$

$P_{n-3}(x) = 2x - 7$

$P_{n-4}(x) = 2$

Berechnung einfacher NS von Polynomen nach Newton

$$\boxed{x_{k+1} = x_k - \frac{P_n(x_k)}{P_n'(x_k)}}$$

Ermittelt z.B. mit Hornershema

Man verbessere die Näherung x_0=0.95 einer NS von $P_3(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$ durch einen Newtonschritt.

	1	-1	-4	4	
	0	0.95	-0.0475	-3.845	
$x_0 = 0.95$	1	-0.05	-4.0475	0.155	$= P_3(x_0)$
	0	0.95	0.855		
$x_0 = 0.95$	1	0.9	-3.193		$= P_3'(x_0)$

Verbesserte Näherung: $x_1 = 0.95 - \frac{0.155}{-3.193} = 0.999$

2. LÖSUNG LINEARER GLEICHUNGSSYSTEME

Austauschverfahren (Matrix)

$$\begin{array}{c|cccccc}
 & \cdots & \cdots & x_k & x_s & \cdots \\
\hline
\vdots & & & \vdots & \vdots & \\
y_i = & & \cdots & a_{ik} & a_{is} & \cdots \\
y_r = & & \cdots & a_{rk} & a_{rs} & \cdots \\
 & & & \vdots & \vdots &
\end{array}$$

Allgemein:
i = Zeilenindex
k = Spaltenindex

```
Pseudocode:
for i=1...n, i≠r
   for k=1...m, k≠s
      a_ik = a_ik - a_rk/a_rs
Pivotzeile:
for k=1...m, k≠s
   a_rk = -a_rk/a_rs
Pivotspalte:
for i=1...n, i≠r
   a_is = a_is/a_rs
Pivotelement:
a_rs = 1/a_rs
```

$$\begin{array}{c|c|c|c|}
 & x_1 & x_2 & x_3 \\
\hline
y_1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\
y_2 & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\
y_3 & a_{31} & a_{32} & a_{33} \\
\hline
 & -\frac{a_{31}}{a_{32}} & & -\frac{a_{33}}{a_{32}}
\end{array}
\Rightarrow
\begin{array}{c|c|c|c|}
 & x_1 & y_3 & x_3 \\
\hline
y_1 & a_{11} - a_{12} \cdot \frac{a_{31}}{a_{32}} & \frac{a_{12}}{a_{32}} & a_{13} - a_{12} \cdot \frac{a_{33}}{a_{32}} \\
y_2 & a_{21} - a_{22} \cdot \frac{a_{31}}{a_{32}} & \frac{a_{22}}{a_{32}} & a_{23} - a_{22} \cdot \frac{a_{33}}{a_{32}} \\
x_2 & -\frac{a_{31}}{a_{32}} & \frac{1}{a_{32}} & -\frac{a_{33}}{a_{32}} \\
\hline
 & -\frac{a_{31}}{a_{32}} & & -\frac{a_{33}}{a_{32}}
\end{array}
\quad (Kellerzeile)$$

Kellerzeilenelemente: Element der Pivotzeile mit $-\frac{1}{p}$ multiplizieren

1. Ersetze Pivotelement p durch $\frac{1}{p}$
2. Die übrigen Elemente der Pivotspalte werden mit $\frac{1}{p}$ multipliziert
3. Die übrigen Elemente der Pivotzeile werden aus der Kellerzeile übernommen.
4. Zu den übrigen Elementen wird das Produkt aus dem gleichzeitigen. Element der Pivotspalte und dem der Kellerzeile addiert.

Beispiele:

Austausch x1 mit y1

$$\begin{array}{c|ccc}
 & x_1 & x_2 & x_3 \\
\hline
y_1 & 2 & 2 & 0 \\
y_2 & 1 & 1 & 2 \\
y_3 & 2 & 1 & 1 \\
\hline
 & & -1 & 0
\end{array}
\quad x_1 \leftrightarrow y_1 \quad
\begin{array}{c|ccc}
 & y_1 & x_2 & x_3 \\
\hline
x_1 & \frac{1}{2} & -1 & 0 \\
y_2 & \frac{1}{2} & 0 & 2 \\
y_3 & 1 & -1 & 1
\end{array}$$

Matrixinversion durch Austausch (nach Stiefel)

$$A\vec{x} = \vec{y} \xrightarrow[\text{Austausch aller } x_k \text{ mit } y_k]{} \vec{x} = B\vec{y}$$
$$B = A^{-1}$$

Gesamtschrittverfahren von Jacobi

$$\begin{array}{lllll}
a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & \cdots & +a_{1n}x_n & = b_1 \\
a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & \cdots & +a_{2n}x_n & = b_2 \\
\vdots & & \cdots & & \vdots \\
a_{n1}x_1 & +a_{n2}x_2 & \cdots & +a_{nn}x_n & = b_n
\end{array}$$

Auflösung nach x_i

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}}(b_i - \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot x_k), \qquad i = 1 \ldots n$$

Gesamtschrittverfahren:

$$\overset{(m+1)}{\vec{x}} = \begin{pmatrix} \overset{(m+1)}{x_1} \\ \vdots \\ \overset{(m+1)}{x_n} \end{pmatrix}, \quad \overset{(0)}{\vec{x}} = \vec{0}, \quad \overset{(m+1)}{x_i} = \frac{1}{a_{ii}}(b_i - \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot \overset{(m)}{x_k})$$

Beispiele:

$$\begin{array}{llll}
5x_1 & +x_2 & +x_3 & = 1 \\
x_1 & +5x_2 & & = 2 \\
x_1 & & +5x_3 & = 0
\end{array}$$

Iterationsvorschrift:

$$\overset{(m+1)}{x_1} = \frac{1}{5}(1 - x - \overset{(m)}{x_2} - \overset{(m)}{x_3})$$
$$\overset{(m+1)}{x_2} = \frac{1}{5}(2 - \overset{(m)}{x_1})$$
$$\overset{(m+1)}{x_3} = \frac{1}{5}(0 - \overset{(m)}{x_1})$$

m	$\overset{(m)}{x_1}$	$\overset{(m)}{x_2}$	$\overset{(m)}{x_3}$
0	0	0	0
1	0.2000	0.4000	0
2	0.1200	0.3600	−0.0400
3	0.1360	0.3760	−0.0240

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0.1360 \\ 0.3760 \\ -0.0240 \end{pmatrix}$$

Einzelschrittverfahren von Gauß-Seidel

Einzelschrittverfahren:

$$\overset{(m+1)}{\vec{x}} = \begin{pmatrix} \overset{(m+1)}{x_1} \\ \vdots \\ \overset{(m+1)}{x_n} \end{pmatrix}, \quad \overset{(0)}{\vec{x}} = \vec{0}, \quad \overset{(m+1)}{x_i} = \frac{1}{a_{ii}}(b_i - (\sum_{k=1}^{i-1} a_{ik} \cdot \overset{(m+1)}{x_k} + \sum_{k=i+1}^{n} a_{ik} \cdot \overset{(m)}{x_k}))$$

$m = 0,1,2,\ldots \qquad i = 1 \ldots n$

Konvergenz: $\sum_{k=1}^{n} |a_{ik}| < |a_{ii}|, \quad i \neq k$

Beispiele:

(LGS siehe oben)

Iterationsvorschrift:

$$\overset{(m+1)}{x_1} = \frac{1}{5}(1 - \overset{(m)}{x_2} - \overset{(m)}{x_3})$$
$$\overset{(m+1)}{x_2} = \frac{1}{5}(2 - \overset{(m+1)}{x_1})$$
$$\overset{(m+1)}{x_3} = \frac{1}{5}(0 - \overset{(m+1)}{x_1})$$

m	$\overset{(m)}{x_1}$	$\overset{(m)}{x_2}$	$\overset{(m)}{x_3}$
0	0	0	0
1	0.2000	0.3600	−0.04
2	0.1360	0.3728	−0.0272
3	0.1309	0.3738	−0.0261

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0.1309 \\ 0.3738 \\ -0.0261 \end{pmatrix}$$

3. INTERPOLATION

Lagrange Polynome

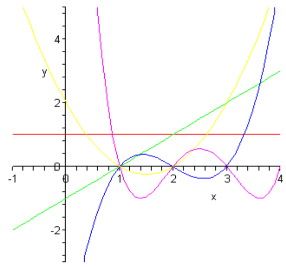
$$L_i(x)=\frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}$$

Interpolationsverfahren von Lagrange

x_i	x_0	x_1	$\cdots$	x_n
f_i	f_0	f_1	$\cdots$	f_n

$$P(x)=f_0L_0(x)+\cdots+f_nL_n(x) \qquad f_i=f(x_i)$$

Newton Interpolation



Newtonpolynom:

$$N_i(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1}), \qquad i=1\dots n$$

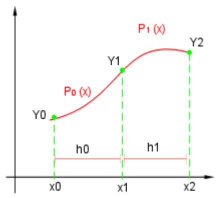
$$P(x)=f_0N_0(x)+f_{0,1}N_1(x)+f_{0,1,2}N_2(x)+\dots+f_{0,1,2\dots n}N_n(x)$$
$$=f_0+f_{0,1}(x-x_0)+\dots+f_{0,1\dots n}(x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})$$

Dividierte Differenzen

$$f_{i,\dots,k}=\frac{f_{i,\dots,k-1}-f_{i+1,\dots,k}}{x_i-x_k}, \qquad i<k$$

$$\begin{array}{cc|c|c|c|c|c}
x_i & f_i & \text{1. Stufe} & \text{2. Stufe} & \text{3. Stufe} & \cdots & \text{n. Stufe} \\
\hline
x_0 & f_0 & & & & & \\
x_1 & f_1 & f_{0,1} & & & & \\
x_2 & f_2 & f_{1,2} & f_{0,1,2} & & & \\
x_3 & f_3 & f_{2,3} & f_{1,2,3} & f_{0,1,2,3} & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & f_{0,1,2,\dots,n} \\
x_{n-1} & f_{n-1} & & f_{n-2,n-1,n} & & & \\
x_n & f_n & f_{n-1,n} & & & &
\end{array}$$

Spline Interpolation



Krümung:

$$\mathrm{K}(x_0)=\frac{f''(x_0)}{\sqrt{((1+(f'(x_0))^2)^3}}$$

Formel für 3 Stützstellen (n=2) (Kubische Splinefkt.)

$$P_0(x)=a_0+b_0(x-x_0)+c_0(x-x_0)^2+d_0(x-x_0)^3$$
$$P_1(x)=a_1+b_1(x-x_1)+c_1(x-x_1)^2+d_1(x-x_1)^3$$

$$P_n'(x)=b_n+2\cdot c_n(x-x_n)+3\cdot d_n(x-x_n)^2$$
$$P_n''(x)=2\cdot c_n+6\cdot d_n(x-x_n)$$

$$a_0=y_0, \quad a_1=y_1, \quad c_0=0$$
$$c_1=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{(h_0+h_1)}\cdot\left(\frac{y_2-y_1}{h_1}-\frac{y_1-y_0}{h_0}\right)$$
$$b_0=\frac{y_1-y_0}{h_0}-\frac{1}{3}\cdot c_1h_0, \qquad b_1=\frac{y_2-y_1}{h_1}-\frac{2}{3}\cdot c_1h_1$$
$$d_0=\frac{c_1}{3\cdot h_0}, \qquad d_1=-\frac{c_1}{3\cdot h_1}$$

$$h_i=x_{i+1}-x_i$$

Für beliebige n:

$$\begin{array}{lllll}
x_i & x_0 & \cdots & x_{n-1} & x_n \\
y_i & y_0 & \cdots & y_{n-1} & y_n
\end{array}$$

$$h_i=x_{i+1}-x_i, \quad i=0\dots n-1$$
$$a_i=y_i, \qquad c_0=0, \qquad c_n=0$$

$$\begin{pmatrix}
2\cdot(h_0+h_1) & h_1 & & & & \\
h_1 & 2\cdot(h_1+h_2) & h_2 & & & \\
 & h_2 & 2\cdot(h_2+h_3) & h_3 & & \\
 & & h_3 & 2\cdot(h_3+h_4) & \cdots & \\
 & & & \cdots & \ddots & h_{n-2} \\
 & & & & h_{n-2} & 2\cdot(h_{n-2}+h_{n-1})
\end{pmatrix}=\vec{c}=3\cdot\begin{pmatrix}
\frac{y_2-y_1}{h_1}-\frac{y_1-y_0}{h_0} \\
\frac{y_3-y_2}{h_2}-\frac{y_2-y_1}{h_1} \\
\frac{y_4-y_3}{h_4}-\frac{y_3-y_2}{h_3} \\
\vdots \\
\frac{y_n-y_{n-1}}{h_{n-1}}-\frac{y_{n-1}-y_{n-2}}{h_{n-2}}
\end{pmatrix}$$

$$b_i=\frac{y_{i+1}-y_i}{h_i}-\frac{(2\cdot c_i+c_{i+1})}{3}\cdot h_i, \qquad d_i=\frac{c_{i+1}-c_i}{3\cdot h_i}$$

Bandmatrix lösen z.B. mit Einzelschrittverfahren

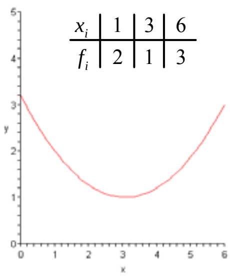
Beispiele:

Man bestimme die Lagrange Polynome für folgende Stützstellen

$$x_0=1, \quad x_1=3, \quad x_2=6$$

$$L_0(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}=\frac{(x-3)(x-6)}{(-2)(-5)}=\frac{1}{10}(x-3)(x-6)$$
$$L_1(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}=\frac{(x-1)(x-6)}{2\cdot(-3)}=-\frac{1}{6}(x-1)(x-6)$$
$$L_2(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}=\frac{(x-1)(x-3)}{5\cdot 3}=\frac{1}{15}(x-1)(x-3)$$

Man bestimme zu folgender Wertetabelle das Lagrange Interpolations-polynom.



x_i	1	3	6
f_i	2	1	3

$$P(x)=2\cdot L_0(x)+L_1\cdot(x)+3\cdot L_3(x)$$
$$=2\cdot\frac{(x-3)(x-6)}{(-2)(-5)}+\frac{(x-1)(x-6)}{2\cdot(-3)}+3\cdot\frac{(x-1)(x-3)}{5\cdot 3}$$
$$=\frac{1}{5}(x-3)(x-6)+\frac{1}{6}(x-1)(x-6)+\frac{1}{5}(x-1)(x-3)$$

Beispiel zu dividierte Differenzen: $f_{0,1}=\frac{f_0-f_1}{x_0-x_1}$, $\quad f_{0,1,2}=\frac{f_{0,1}-f_{1,2}}{x_0-x_2}$

$$\begin{array}{cc|c|c|c}
x_i & f_i & \text{1. Stufe} & \text{2. Stufe} & \text{3. Stufe} \\
\hline
0 & 1 & & & \\
1 & 1 & 0 & & \\
2 & 2 & 1 & 1/2 & \\
4 & 5 & 3/2 & 1/6 & -1/12
\end{array}$$

$$f_{0,1}=0 \qquad f_{0,1,2}=1/2$$
$$f_{1,2}=1 \qquad f_{1,2,3}=1/6$$
$$f_{2,3}=3/2 \qquad f_{1,2,3,4}=-1/12$$

x_i	1	2.5	5
y_i	1.2	1.9	3

$$\Rightarrow h_0=1.5, \qquad h_1=2.5$$
$$a_0=1.2, \qquad a_1=1.9, \qquad c_0=0$$
$$c_1=\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{1.5+2.5}\right)\cdot\left(\frac{3-1.9}{2.5}-\frac{1.9-1.2}{1.5}\right)=-0.01$$
$$b_0=\frac{1.9-1.2}{1.5}-\frac{1}{3}\cdot(-0.01)\cdot 1.5=0.4716, \qquad b_1=\dots=0.456$$
$$d_0=\frac{-0.01}{3\cdot 1.5}=-0.0022, \qquad d_1=-\frac{(-0.01)}{3\cdot 2.5}=0.013$$
$$F(x)=\begin{cases}P_0(x)=1.2+0.4716\cdot(x-1)-0.0022\cdot(x-1)^3, & x\in[1,2.5] \\ P_1(x)=1.9+0.456\cdot(x-2.5)-0.01\cdot(x-2.5)^2+0.0013\cdot(x-2.5)^3, & x\in[2.5,5]\end{cases}$$

4. APPROXIMATION

Gauß'sche Methode der kleinsten Quadrate

Approximation durch Gerade: $P(x)=c_1+c_2\cdot x, \qquad m=2$

Aufzustellendes LGS: $\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\end{pmatrix}$

Approximation durch Parabel: $P(x)=c_1+c_2\cdot x+c_3\cdot x^2, \qquad m=3$

Aufzustellendes LGS: $\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\\ c_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\end{pmatrix}$

Matrix regulär und symmetrisch

$$a_{kl}=\sum_{i=1}^{n}x_i^{k+l-2}, \qquad b_k=\sum_{i=1}^{n}f_i\cdot x_i^{k-1} \qquad k=1\dots m, \quad l=1\dots m$$
$$a_{kl}=a_{lk}$$

Residium: $R=P(x_i)-f_i$

Beispiele:

x_i	0	1	2	3	4
f_i	−3	−1.02	1.04	3.01	4.95

$P(x)=c_1+c_2\cdot x, \qquad m=2$

Normalgleichungen:

$$\begin{Bmatrix}a_{11}\cdot c_1+a_{12}\cdot c_2=b_1\\ a_{21}\cdot c_1+a_{22}\cdot c_2=b_2\end{Bmatrix}$$

$$a_{11}=\sum_{i=1}^{5}x_i, \qquad a_{12}=\sum_{i=1}^{5}x_i^{1}$$
$$a_{22}=\sum_{i=1}^{5}x_i^{2}, \qquad b_1=\sum_{i=1}^{5}f_i, \qquad b2=\sum_{i=1}^{5}f_i\cdot x_i$$

i	x_i^0	x_i^1	x_i^2	f_i	$f_i\cdot x_i$
1	1	0	0	−3	0
2	1	1	1	−1.02	−1.02
3	1	2	4	1.04	2.08
4	1	3	9	3.01	9.03
5	1	4	16	4.95	19.8
Σ	5	10	30	4.98	29.8
	a_{11}	a_{12} a_{21}	a_{22}	b_1	b_2

$$5\cdot c_1 + 10\cdot c_2 = 4.98$$
$$10\cdot c_1 + 30\cdot c_2 = 29.89$$
$$c_1=\dots=-2.99, \qquad c_2=\dots=1.99$$

Approximationsgerade: $P(x)=-2.99+1.99\cdot x$

Gaußapproximation von Funktionen

Skalarprodukt von Funktionen: $f \cdot g = \int_a^b f(x) \cdot g(x) \cdot dx$

φ_n : Basisfunktionen z.B. $\varphi_0 = 1,\ \varphi_1 = x,\ \varphi_2 = x^2 \ldots$

a_n : Gesuchte Koeffizienten

Kurzschreibweise: $(\varphi_n, \varphi_m) = \int_a^b \varphi_n(x)\, \varphi_m(x) \cdot dx$

$P(x) = a_0 \cdot \varphi_0(x) + \ldots + a_n \cdot \varphi_n(x)$

$$\begin{pmatrix} (\varphi_0,\varphi_0) & (\varphi_0,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_0,\varphi_n) \\ (\varphi_1,\varphi_0) & (\varphi_1,\varphi_1) & & (\varphi_1,\varphi_n) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ (\varphi_n,\varphi_0) & (\varphi_n,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_n,\varphi_n) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (f,\varphi_0) \\ (f,\varphi_1) \\ \vdots \\ (f,\varphi_n) \end{pmatrix}$$

Lösung des LGS z.B. mit Cramer/Einzelschrittverfahren.

Beispiele:

Approximation von $f(x) = \sqrt{x}$ in $[a,b] = \left[\frac{1}{16}, 1\right]$

Basisfunktionen: $\varphi_0 = 1, \qquad \varphi_1 = x$

Ansatz: $P(x) = a_0 \cdot \varphi_0(x) + a_1 \cdot \varphi_1(x) = a_0 + a_1 \cdot x$

$$\begin{pmatrix} (\varphi_0,\varphi_0) & (\varphi_0,\varphi_1) \\ (\varphi_1,\varphi_0) & (\varphi_1,\varphi_1) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (f,\varphi_0) \\ (f,\varphi_1) \end{pmatrix}$$

$$(\varphi_0,\varphi_0) = \int_{\frac{1}{16}}^{1} \varphi_0 \cdot \varphi_0 \cdot dx = \int_{\frac{1}{16}}^{1} 1 \cdot dx = 0.9375$$

$$(\varphi_1,\varphi_0) = (\varphi_0,\varphi_1) \int_{\frac{1}{16}}^{1} 1 \cdot x \cdot dx = 0.498047$$

$$(\varphi_1,\varphi_1) = \int_{\frac{1}{16}}^{1} x \cdot x \cdot dx = 0.333252$$

$$(f,\varphi_0) = \int_{\frac{1}{16}}^{1} \sqrt{x} \cdot dx = 0.65620$$

$$(f,\varphi_1) = \int_{\frac{1}{16}}^{1} x \cdot \sqrt{x} \cdot dx = \int_{\frac{1}{16}}^{1} x^{\frac{3}{2}} \cdot dx = 0.399609$$

$$\begin{pmatrix} 0.9375 & 0.498047 \\ 0.498047 & 0.333252 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.65620 \\ 0.399609 \end{pmatrix}$$

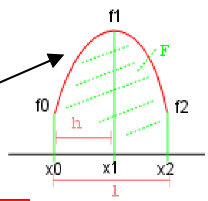
$a_0 = 0.305603, \qquad a_1 = 0.742394$

$P(x) = 0.305603 + 0.742394 \cdot x$

5. NUMERISCHE INTEGRATION

Newton-Cotes Formeln

n	Bezeichnung	Formel
1	Tangententrapez	$F = l \cdot f_{\frac{1}{2}}$
2	Sehnentrapez	$F = \frac{l}{2} \cdot (1 \cdot f_0 + 1 \cdot f_1)$
3	Simpson	$F = \frac{l}{6} \cdot (1 \cdot f_0 + 4 \cdot f_1 + 1 \cdot f_2)$
4	$^3\!/_8$ *Formel*	$F = \frac{l}{8} \cdot (1 \cdot f_0 + 3 \cdot f_1 + 3 \cdot f_2 + 1 \cdot f_3)$



h: Schrittweite

Tangententrapezsumme im Intervall [a,b]

$$F = h \cdot (f_{1/2} + f_{3/2} + \ldots + f_{m-1/2}) \approx \int_a^b f(x) \cdot dx$$

(Sehnen-)Trapezsumme im Intervall [a,b]

$$F = \frac{h}{2} \cdot (f_0 + 2 \cdot f_1 + 2 \cdot f_2 + \ldots + 2 \cdot f_{m-1} + f_m) \approx \int_a^b f(x) \cdot dx$$

Simpsonsumme (für m=gerade) im Intervall [a,b]

$$F = \frac{h}{3} \cdot (f_0 + 4 \cdot f_1 + 2 \cdot f_2 + 4 \cdot f_3 + 2 \cdot f_4 + \ldots + 4 \cdot f_{m-1} + f_m) \approx \int_a^b f(x) \cdot dx$$

$$\mathit{Interval} : [a,b] \qquad m = \frac{b-a}{h}$$

Fehlerabschätzungen

Für Sehnentrapezsumme gilt:

$$\left| \int_a^b f(x) \cdot dx - F_1 \right| \le M_1 \cdot h^2, \qquad M_1 = \frac{b-a}{2} \cdot \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|$$

Für Simpsonsumme gilt:

$$\left| \int_a^b f(x) \cdot dx - F_2 \right| \le M_2 \cdot h^4, \qquad M_2 = \frac{b-a}{180} \cdot \max_{x \in [a,b]} |f^{(4)}(x)|$$

Beispiele:

$f(x) = \int_0^1 \frac{1}{x+2}, \qquad h = 0.25$

Sehnentrapezverfahren :

$m = \frac{1-0}{h}$

$$F = \frac{h}{2} \cdot (f_0 + 2 \cdot f_1 + 2 \cdot f_2 + f_3) = 0.125 \cdot (0.5 + 2 \cdot 0.4\overline{4} + 2 \cdot 0.4 + 2 \cdot 0.\overline{36} + 0.3\overline{3})$$

$$= 0.406186868 \approx \int_0^1 \frac{1}{x+2} \cdot dx$$

Fehlerabschätzung :

$$\left| \int_a^b f(x) \cdot dx - F_1 \right| \le M_1 \cdot h^2 \quad \text{mit} \quad M_1 = \frac{b-a}{2} \cdot \max |f''(x)|, \qquad x \in [a,b]$$

$f'(x) = ((x+2)^{-1})' = -(x+2)^{-2}$

$f''(x) = 2 \cdot (x+2)^{-3} = \frac{2}{(x+2)^3}$

$f''(0) = \frac{2}{2^3} = 0.25, \qquad f''(1) = \frac{2}{3^3} = 0.074 \qquad \Rightarrow \max|f''(x)| = 0.25$

$M_1 = \frac{1}{2} \cdot 0.25 \quad \Rightarrow \qquad \varepsilon \le M_1 \cdot h^2 \le 0.015625$

6. NUMERISCHE METHODEN ZUR LÖSUNG GEWÖHNLICHER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

AWP: $y' = f(x,y), \qquad y(x_0) = y_0$

h: Schrittweite

Euler-Verfahren:

$y_{k+1} = y_k + h \cdot f(x_k, y_k) \qquad (\mathit{Euler})$

Verbessertes Verfahren:

$y_{k+1} = y_k + h \cdot \frac{y_{k+1} - y_k}{2}$

Runge-Kutta Verfahren 2. Ordnung:

$y_{n+1} = y_n + h \cdot \frac{1}{2} \cdot (l_1 + l_2)$

$l_1 = f(x_n, y_n)$

$l2 = f(x_n + h, y_n + h \cdot l_1)$

Zielsetzung: $y_i \approx y(x_i)$

Runge-Kutta Verfahren 4. Ordnung:

$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6} \cdot (k_1 + 2 \cdot k_2 + 2 \cdot k_3 + k_4)$

$k_1 = h \cdot f(x_n, y_n)$

$k_2 = h \cdot f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2})$

$k_3 = h \cdot f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2})$

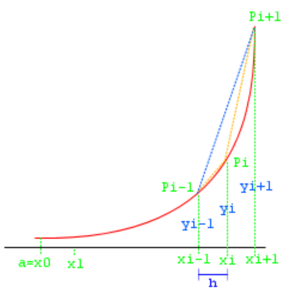
$k_4 = h \cdot f(x_n + h, y_n + k_3)$

Schrittweitenanpassung für Runge-Kutta 4.Ordnung

$0.025 \le Q < 0.1 \qquad$ mit $Q = \frac{|k_3 - k_2|}{|k_2 - k_1|}$

$Q > 0.1 \qquad \Rightarrow$ Ungenaue Näherungswerte

$Q < 0.025 \qquad \Rightarrow$ Rundungsfehler zu hoch



Differenzenverfahren (für RWP und AWP beliebiger Ordnung)

Steigung : $y(x_i)' = y_i' \approx \frac{y_{i+1} - y_i}{h}$

$y_i' \approx \frac{y_i - y_{i-1}}{h}$ Rückwärtsgenommene Differenz

$y_i' \approx \frac{y_{i+1} - y_i}{h}$ *Vorwärtsgenommene Differenz*

$y_i' \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{h}$ Zentrale Differenz

$$y_i'' \approx_i \frac{y'_{i+1} - y'}{h} = \frac{\frac{y_{i+1} - y_i}{h} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h}}{h} = \frac{y_{i+1} - 2 \cdot y_2 + y_{i-1}}{h^2}$$

$$y_i''' \approx \frac{y_{i+2} - 2 \cdot y_{i+1} + 2 \cdot y_{i-1} - y_{i-2}}{2 \cdot h^3}$$

Beispiele:

AWP: $y' = y - \frac{2x}{y}, \qquad y(0) = 1 \qquad$ (Runge-Kutta)

Man bestimme einen Näherungswert der Lösung y(x) in 0.2 und 0.4

$h = 0.2, \qquad x_0 = 0, \qquad y_0 = 1, \qquad f(x,y) = y - \frac{2x}{y}$

Gesucht:

$y_1 \approx y(0.2), \qquad y_2(0.4)$

$n = 0$:

$y_1 = y_0 + 0.2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (l_1 + l_2)$

$l_1 = f(x_0, y_0) = f(0,1) = 1$

$l_2 = f(x_0 + h, y_0 + h \cdot l_1) = f(0.2, 1 + 0.2 \cdot 1) = 0.8\overline{6}$

$y_1 = 1 + 0.1 \cdot (1 + 0.8\overline{6}) = 1.18\overline{6} \approx y(0.2)$

$n = 1$:

$y_2 = y_1 + 0.2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (l_1 + l_2)$

$l_1 = f(x_1, y_1) = f(0.2, 1.18\overline{6}) = 0.849588$

$l_2 = \ldots = 0.766869$

$y_2 = \ldots = 1.348313 \approx y(0.4)$

Differenzenverfahren : *RWP* : $y'' = 1 - y, \qquad y(0) = 1, y(1) = 2$

$h = 0.2, \qquad$ *Stützstellen* : $x_i = i \cdot h, \qquad i = 0 \ldots 5$

$y''(x_i) \approx y_i'' = \frac{y_{i+1} - 2 \cdot y_i + y_{i-1}}{h^2} = 1 - y \qquad \Rightarrow \qquad y_{i+1} - 2 \cdot y_i + y_{i-1} = 0.04 - 0.04 \cdot y_i$

$y_{i-1} - 1.96 \cdot y_i + y_{i+1} = 0.04$

LGS :

$$\begin{array}{llllllll} i=1: & y_0 - 1.96 \cdot y_1 & + y_2 & & & & = & 0.04 \\ i=2: & & y_1 - 1.96 \cdot y_2 & + y_3 & & & = & 0.04 \\ i=3: & & & y_2 - 1.96 \cdot y_3 & + y_4 & & = & 0.04 \\ i=4: & & & & y_3 - 1.96 \cdot y_4 & + y_5 & = & 0.04 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} -1.96 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1.96 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1.96 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1.96 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.96 \\ 0.04 \\ 0.04 \\ -1.96 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Lösen mit Gauß oder Iterativ}$$

$y(x_1) \approx y_1 = 1.236233$

$y(x_2) \approx y_2 = 1.463018$

$y(x_3) \approx y_3 = 1.671282$

$y(x_4) \approx y_4 = 1.852695$

Zusatz (allgemein):

$ax^2 + bx + c = 0$

$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Integrale

$\int u \cdot v \cdot dx = u \cdot v' - \int u' \cdot v \cdot dx$